Coherent State

Chih-Han Lin 林致翰*

I. 相干態

相干態（coherent state）即湮滅算子 $\boldsymbol{a}$ 對應到的 eigenstate $|a\rangle$

$$\boldsymbol{a}|a\rangle = a|a\rangle. \tag{1}$$

由於 $\boldsymbol{a}$ 非 Heritian，相干態的 eigenvalue 一般而言爲複數。如果使用 $|n\rangle$ 將 $|a\rangle$ 展開，即 $|a\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$，$c_n = \langle n|a\rangle$ 則

$$\boldsymbol{a}|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \boldsymbol{a}|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle \tag{2}$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle. \tag{3}$$

由此可知 $c_n\sqrt{n} = ac_{n-1}$，故 $c_1 = ac_0$、$c_2 = ac_1/\sqrt{2} = a^2c_0/\sqrt{2!}$、$c_n = a^n c_0/\sqrt{n!}$，我們可以將 $|a\rangle$ 改寫成

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{4}$$

c_0 可由歸一化條件 $\langle a|a\rangle = 1$ 來決定

$$\langle a|a\rangle = 1 = |c_0|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a|^{2n}}{n!}\langle n|n\rangle = |c_0|^2 e^{|a|^2}. \tag{5}$$

因此 $c_0 = e^{-|a|^2/2}$。$|a\rangle$ 投影到 $|n\rangle$ 中可寫成

$$|a\rangle = e^{-|a|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{6}$$

$p(n) = |\langle n|a\rangle|^2 = e^{-|a|^2/2}/\sqrt{n!}$，相干態在 Fock state $|n\rangle$ 的投影機率即 Poisson 分佈，$p(n)$ 爲出現 n 顆光子或激發態的機率。在 $|a\rangle$ 中光子數的平均值即 $\sum np(n) = |a|^2 = \langle a|\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}|a\rangle$，其數目與 a 之 sqare norm 成正比。

$|a\rangle$ 在 q-representation 中的波函數可寫成

$$\begin{aligned}\psi_a(x) &= \langle x|a\rangle = \langle x|n\rangle\langle n|a\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}e^{-(|a|^2+x^2)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a/\sqrt{2})^n}{n!}H_n(x) \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}e^{-(x-\sqrt{2}x)^2/2}.\end{aligned} \tag{7}$$

若將 a 寫爲 $a = x + iy$，我們可以將 a 表示成位置 x 與動量 p 在相干態下平均值的線性組合:

$$\langle x\rangle = \langle a|\boldsymbol{x}|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^\dagger)|a\rangle = \sqrt{2}x, \tag{8}$$

$$\langle p\rangle = \langle a|\boldsymbol{p}|a\rangle = -\frac{(a-a^*)i\hbar}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\hbar y. \tag{9}$$

故 $a = x + iy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle x\rangle + \frac{1}{\hbar}\langle p\rangle\right)$. 相干態在 q-reprensentation 下的波函數可表達爲平均值 $\sqrt{2}a = \langle x\rangle + \langle p\rangle/\hbar$ 的 Guass 分佈。

II. 非正交性與超完備性

$$\begin{aligned}|a\rangle\langle a'| &= \langle n|\frac{e^{-|a|^2}a^{*n}}{\sqrt{n!}}\frac{e^{-|a'|^2}a'^{n'}}{\sqrt{n'!}}|n'\rangle \\ &= \frac{e^{-(|a|^2+|a'|^2)/2}(a^*a')^2}{n!} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|a|^2+|a'|^2)+a^*a'\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|a-a'|^2\right).\end{aligned} \tag{10}$$

由此可看出不同的相干態並不正交，只有在 a 與 a' 差距極大的時候才趨近正交。由相干態構成的投影算子 $|a\rangle\langle a|$ 是否具備完備性可進行複平面上的積分來計算:

$$\begin{aligned}\int dz|z\rangle\langle z| &= \sum_{n,n'}\frac{|n\rangle\langle n'|}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}}\int dze^{-|a|^2}a^n a^{*n'} \\ &= \sum_n\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int rdrd\theta e^{-r^2}r^{2n} \\ &= 2\pi\sum_n\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int_0^{\infty}drr^{2n+1}e^{-r^2} = \pi\end{aligned} \tag{11}$$

* clin@ltl.iams.sinica.edu.tw

我們可以把任意的 state $|\psi\rangle$ 用相干態來展開

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int da|a\rangle\langle a|\psi\rangle. \tag{12}$$

由於相干態的非正交性，相干態的基底數超出空間維數，將任意的 $|\psi\rangle$ 在相干態上展開時各個分量彼此線性相關，故謂之超完備性。

III. 相干態的平移算子

欲找出 $\boldsymbol{D}(a)$ 滿足 $\boldsymbol{D}(a)|a=0\rangle = |a\rangle$ 可改寫 eq. (6)

$$\begin{aligned}|a\rangle &= e^{-|a|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\boldsymbol{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|n=0\rangle\right)\\ &= e^{-|a|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\boldsymbol{a}^{\dagger n}}{n!}|n=0\rangle\\ &= e^{-|a|^2/2}e^{a\boldsymbol{a}^\dagger}|n=0\rangle.\end{aligned} \tag{13}$$

由於 $e^{-a^*\boldsymbol{a}}|n=0\rangle = |n=0\rangle$ ，我們可以加入 $e^{-a^*\boldsymbol{a}}$ 因子到前一個式子中讓它看起來更對稱:

$$\boldsymbol{D}(a)|n=0\rangle = e^{-|a|^2/2}e^{a\boldsymbol{a}^\dagger}e^{-a^*\boldsymbol{a}}|n=0\rangle = |a\rangle. \tag{14}$$

利用 Campbell-Baker-Hausdorff 公式，已知

$$\begin{aligned}[][a\boldsymbol{a}^\dagger,[a\boldsymbol{a}^\dagger,-a^*\boldsymbol{a}]] &= 0,\\ [-a^*\boldsymbol{a},[-a^*\boldsymbol{a},a\boldsymbol{a}^\dagger]] &= 0,\\ [a\boldsymbol{a}^\dagger,-a^*\boldsymbol{a}] &= |a|^2.\end{aligned} \tag{15}$$

可將位移算子寫成更精練的形式

$$\boldsymbol{D}(a) = e^{-|a|^2/2}e^{a\boldsymbol{a}^\dagger}e^{-a^*\boldsymbol{a}} = e^{a\boldsymbol{a}^\dagger - a^*\boldsymbol{a}}. \tag{16}$$

$\boldsymbol{D}(a)$ 也是 Unitary 算子，$\boldsymbol{D}(a)\boldsymbol{D}^\dagger(a) = \boldsymbol{D}^\dagger(a)\boldsymbol{D}(a) =$ I。$\boldsymbol{D}(a)$ 有下述特性:

1. Unitary transform 形成複數位移 a 或 a^*

$$\boldsymbol{D}^\dagger(a)F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger)\boldsymbol{D}(a) = F(\boldsymbol{a}+a,\boldsymbol{a}^\dagger+a^*). \tag{17}$$

2. 連續作用的位移算子與合成一次位移算子的效果僅有相位差

$$\boldsymbol{D}(a)\boldsymbol{D}(a') = e^{(aa'^*-a^*a')/2}\boldsymbol{D}(a+a'). \tag{18}$$

3. 不同位移算子彼此正交

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{D}(a)\boldsymbol{D}^\dagger(a')] = \pi\delta(\Re\{a-a'\})\delta(\Im\{a-a'\}). \tag{19}$$

Reference

[1] L.Mandel, E.Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge, 1995.
[2] 王正行, 量子力學原理, 2nd ed, 北京大學出版社, 2008.